

$\text{Rango}(A) \rightarrow$ ordine massimo r di un minore quadrato
 $n \times n$ con $\det \neq 0$ contenuto in A

$$= \dim L_R(A) = \dim L_C(A) = \dim \text{Im } f_A$$

$$f_A: \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ X \rightarrow AX \end{cases}$$

$$\text{Im } f_A = L_C(A)$$

A ha rango $r \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{K}^{n \times r}$ contenuto in A con
 $\det(M) \neq 0$ e ogni orlato di M
(- minore $(r+1) \times (r+1)$ che contiene M)
ha $\det = 0$.

Sistemi lineari:

• collezioni di m equazioni di I grado in n incognite

Esempio: $ax = b$ con $a, b \in \mathbb{K}$ 1 eq. in 1. inc.

Soluzione: $s \in \mathbb{K}$ tale che $as = b$

- 1) $\exists$ soluzioni?
- 2) Quante sono?
- 3) Quali sono?

$$\underline{ax = b}$$

3 possibilità:

- $(a, b) = (0, 0)$

$$\Rightarrow 0 \cdot x = 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{K}$$

$|\mathbb{K}|$ soluzioni.

- $a = 0, b \neq 0$

$$0 \cdot x = b \rightarrow \text{No solution}$$

$$0 = b \neq 0$$

- $a \neq 0, ax = b$

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b \quad \exists! \text{ sol.}$$

Def: Sia (*) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ una equazione di I grado a coeff $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$.

Si dice soluzione di (*) ogni n -upla

$$(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tale che } \boxed{a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i}$$

Def: Un sistema lineare a coeff. in $\mathbb{K}$

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni in n incognite è detto compatibile se esiste $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ che è soluzione contemporanea di tutte le m equazioni.

oss:

poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice incompleta

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

vettore dei
termini noti

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

vettore
delle incognite.

e osserviamo che (*) si può riscrivere

formalmente come

$$\boxed{AX = B}$$

forma matriciale
del sistema.

oss: Se $\det(A) \neq 0$ (ed in particolare $A \in \mathbb{K}^{n,n}$)

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

"

$$\underbrace{(A^{-1}A)}_I X = B$$

$$X = A^{-1}B$$

I è soluzione del sistema

(ed in effetti è l'unica soluzione).

Un sistema di questo tipo è detto di Cramer

$$\triangle AX=B \rightarrow X=A^{-1}B \quad \det(A) \neq 0$$

No $X=BA^{-1}$ o $X=B/A$!!

non è una matrice.

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} ??$$

↑ colonne ↑ matrice quadrata

→ chiedere cosa significherebbe il prod di matrici non è commutativo.

Risolvere il sistema (*) equivale a trovare i vettori

$$Se \mathbb{R}^n \text{ tali che } AS=B.$$

corrisponde a cercare le sol. di $AX=B \quad X \in \mathbb{R}^n$

corrisponde a trovare gli X tali che $f_A(X)=B$

cioè le preimmagini di B secondo la funzione lineare.

$$f_A(X) := AX.$$

$\left[\begin{array}{l} \text{Sistema} \\ AX=B \\ \text{compatibile} \end{array} \right] \Leftrightarrow B \in \text{Im } f_A \Leftrightarrow B \in \text{Im } f_A \text{ appartiene all'immagine di } f_A$

$$\Leftrightarrow B \in \text{Im } f_A = L_c(A) \Leftrightarrow L_c(A) + L(B) = L_c(A)$$

$(B \text{ è comb. lineare delle colonne di } A).$

$$\Leftrightarrow L(c_1 \dots c_n, B) = L(c_1 \dots c_n) \Leftrightarrow$$

$$(\text{ove } A = [c_1 \dots c_n] \quad \uparrow \quad \uparrow \text{colonne}) \quad (A|B) = [c_1 \dots c_n \ B]$$

$$\Leftrightarrow \dim L(c_1 \dots c_n, B) = \dim L(c_1 \dots c_n)$$

$$\Leftrightarrow [\text{rk}(A|B) = \text{rk}(A)]$$

Théorème (Rouché-Cayley). [EXISTENZA DELLE SOLUZIONI]

Sia $AX=B$ un sistema lineare.

Allors esso è compatible (= ammette soluzioni)

se e seulement se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$.

A = matrice incomplete del sistema / matrice dei coefficienti.

$(A|B)$ = matrice obtenue ajoutant la colonne B alle colonne de A
= matrice complete del sistema.

Quante sono le soluzioni di un sistema $AX=B$?

↓
Toute quante le preimages de B secondo f_A

• Se $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A|B) \Rightarrow 0$ soluzioni.

• Se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$ sappiamo che tutte e sole le premungie di B si scrivono come

$X_0 + \text{Ker}(A)$ ove X_0 è una premungia fissa.

$$\begin{aligned} \text{I Se } \mathbb{Z}' \in \text{Ker } A \text{ e } f_A(x_0) = B &\Rightarrow f_A(x_0 + \mathbb{Z}') = \\ &= Ax_0 + A\mathbb{Z}' = B + 0 = B. \end{aligned}$$

Viceversa se $f_A(x_0) = B = f_A(x'_0) \Rightarrow$

$$f_A(x'_0) - f_A(x_0) = f_A(x'_0 - x_0) = 0$$

$$\Rightarrow x'_0 - x_0 \in \text{Ker } A \Rightarrow x'_0 \in x_0 + \text{Ker } A. \quad \text{I}$$

Def. OSS: Le premungie di $B =$ soluzioni di $AX=B$ sono in corr. biunivoca con gli el. di $\text{Ker } A$.

Def: in questo caso diciamo che le soluzioni di $AX=B$ sono $\infty^{\dim \text{Ker}(A)}$ con $\infty^0=1$

D'altro canto per un litio + n au go

$$\dim \text{Ker}(A) + \underbrace{\dim \text{Im}(A)}_{rk(A)=k} = n$$

$\Rightarrow \dim \text{Ker}(A) = n-k$ ed il sistema ha

∞^{n-k} soluzioni.

In altri termini le soluzioni di $AX=B$ dipendono da $(n-k)$ parametri.

Sia X_0 una soluzione e $Z_1 \dots Z_{n-k}$ una base di $\text{Ker}(A)$.

Allora la soluzione generica $\tilde{X}$ ~~risolver~~ è un elemento

$$\text{di } X_0 + \text{Ker}(A) = X_0 + \mathcal{L}(Z_1 \dots Z_{n-k})$$

cioè $\exists t_1 \dots t_{n-k} \in \mathbb{K}$ tali che $\tilde{X} = X_0 + t_1 Z_1 + \dots + t_{n-k} Z_{n-k}$

ed al variare di $(t_1 \dots t_{n-k}) \in \mathbb{K}^{n-k}$ abbiamo tutte le

soluzioni possibili. $[\Rightarrow \sum_{n-k} \text{parametri}]$

$$\infty^{n-k} \rightarrow (n-k) = \dim \text{Ker } A$$

$$= \# \text{parametri da cui}$$

dipendono le soluzioni.

⚠ L'insieme delle soluzioni di $AX=B$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow B=0$ (cioè il sistema lineare è omogeneo).

DIM: Sia S l'insieme delle soluzioni.

Se $B \neq 0 \Rightarrow S$ non è n.vett.

Se $B \neq 0 \Rightarrow 0 \notin S \Rightarrow S$ non è n.vett.

Se $B=0 \Rightarrow S = \ker(A)$ e questo sappiamo già che è n.vett. $\square$

In particolare $AX=0$ (sistema lin. omogeneo) ammette sempre come soluzione 0 (sol. banale).

Ogni soluzione NON BANALE ($\neq 0$) di $AX=0$ è detta autosoluzione di $AX=0$.

Def: Due sistemi lineari $AX=B$ e $A'X=B'$ sono detti equivalenti se essi hanno le stesse soluzioni.

N.B. Il numero di incognite in 2 sistemi equivalenti è lo stesso ma il numero di equazioni può essere differente.

Risolvere $AX=B \equiv$ trovare S insieme delle soluzioni

↓
identificare una soluzione particolare X_0
e una base di $\text{Ker}(A)$.
visto che $S = X_0 + \text{Ker}(A)$.

Sia $AX=B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

chiamo omogeneizzazione del sistema $AX=B$

il sistema $(*)' (A|B) \begin{bmatrix} X \\ +x_0 \end{bmatrix} = 0$ $AX=x_0B$

Oss: ogni soluzione di $(*)'$ con $x_0=1$ corrisponde ad una soluzione di $(AX)=B$

Sia $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ +\bar{x}_0 \end{pmatrix}$ una soluzione di $(A|B) \begin{bmatrix} X \\ -x_0 \end{bmatrix}$ con $\bar{x}_0 \neq 0$

$\Rightarrow \bar{X}/\bar{x}_0$ è un vettore le cui prime n

entrate sono soluzione di $AX=B$.

$$A\bar{X} = \bar{x}_0 B \quad \bar{x}_0^{-1} A\bar{X} = B \\ \Rightarrow A \bar{x}_0^{-1} \bar{X} = B$$

$\bar{x}_0$ è soluzione di $AX=B$
prendendo solo le
prime n entrate.

oss: le soluzioni di un sistema lineare

$$(A|B)\tilde{X} = \underline{0}$$

dipendono solamente dallo spazio vettoriale
generato dalle righe di $(A|B)$.

→ per trovare queste soluzioni

a) cerchiamo una base "bella" di $\mathcal{L}_R(A|B)$

b) risolviamo nel sistema "semplificato" con
ottenuto.

D14: Supponiamo di avere $(A|B) \tilde{X} = 0$

allora applicando le seguenti 3 trasformazioni elementari alla matrice $(A|B)$ l'insieme delle soluzioni $= \text{Ker}(A|B)$ non cambia.

i) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.

ii) sommare ad una riga (un multiplo scalare di) un'altra

iii) permutare le righe.

